4.3.7 Punto más cercano, simétrico y perpendicular común

1. **Punto de una recta más cercano a Q:** $M = P_0 + t\,\vec{u}$ con $t = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (es decir, $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{u} = 0$).
2. **Punto de un plano más cercano a Q:** recta por Q con dirección $\vec{n}$; su intersección con el plano (4.3.6).
3. **Simétrico:** $Q' = 2M - Q$.
4. **Puntos más cercanos entre dos rectas que se cruzan:** con $P(s) \in L_1$ y $Q(t) \in L_2$, pide $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_1 = 0$ y $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{u}_2 = 0$; el sistema da s y t. La recta PQ es la perpendicular común, de dirección $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$.

4.3.8 Puntos o planos a una distancia dada

1. Escribe el punto buscado con el parámetro de su recta, $P(t)$, o el plano buscado con su incógnita, $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Plantea la distancia con la fórmula que toca e iguálala al dato.
3. Un valor absoluto da dos ecuaciones (±); una distancia entre puntos se eleva al cuadrado. Casi siempre hay dos soluciones: escribe las dos.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Posición relativa de dos rectas

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 4.

Sean las rectas

$$L_1:\ \vec{p} = (1,2,1) + t\,(1,-1,-2) \qquad \text{y} \qquad L_2:\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

En caso de que L_1 y L_2 sean paralelas, obtenga la ecuación cartesiana del plano que las contiene; en caso de que se crucen, calcule la distancia entre ellas; en caso de que se corten, determine las coordenadas de su punto de intersección.

Resolución.

1. **Datos:** $P_1(1,2,1)$, $\vec{u}_1 = (1,-1,-2)$; de las paramétricas de L_2 con $\lambda = 0$, $P_2(0,7,4)$, y $\vec{u}_2 = (1,3,-1)$.
2. **¿Son paralelas?**

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1+6)\,\hat{\imath} - (-1+2)\,\hat{\jmath} + (3+1)\,\hat{k} = (7,-1,4) \neq \vec{0}.$$

   No se cumple: no son paralelas. (También se ve directo: $\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$ pediría $k = 1$ y $k = -\frac{1}{3}$.)
3. **¿Son coplanares?** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,5,3)$ y

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = -7 - 5 + 12 = 0.$$

3.3.3 Componente escalar y componente vectorial

1. Identifica quién se proyecta ($\vec{a}$) y *sobre* quién ($\vec{b}$). Si el vector se da como segmento, conviértelo: $\overrightarrow{AB} = B - A$.
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $|\vec{b}|$ (o $|\vec{b}|^2$).
3. Escalar: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Vectorial: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$, simplificada y en componentes.
4. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, las dos componentes son cero: los vectores son perpendiculares.

3.3.4 Vector perpendicular a dos vectores o con ángulo dado

1. **Perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$:** calcula $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ y saca factores comunes.
2. **Unitario:** $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$; **con módulo r:** $\pm\frac{r}{|\vec{n}|}\vec{n}$.
3. **Con condiciones sueltas** (paralelo a un plano coordenado, ángulo dado con otro vector): escribe el vector con incógnitas (paralelo al plano XZ: $(x,0,z)$), plantea una ecuación por condición ($|\hat{v}| = 1$; $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$) y resuelve el sistema.
4. Comprueba con el producto escalar que da 0 (o el coseno pedido).

3.3.5 Áreas

1. Escoge dos lados que salgan del mismo vértice. Con vértices: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Con diagonales: usa directamente $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$.
2. Calcula el producto cruz con el determinante y su módulo; simplifica el radical.
3. Paralelogramo: $|\vec{a}\times\vec{b}|$. Triángulo: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$. Diagonales: $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$. Cuadrilátero: suma de dos triángulos separados por una diagonal.
4. **Sin componentes** (datos de módulos, ángulo y componente escalar): obtén los módulos que falten con $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$ y usa $A = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta$ (o la mitad).
5. Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, el área del paralelogramo es $|\vec{a}||\vec{b}|$ (rectángulo).

3.3.6 Volúmenes y coplanaridad

1. Escribe las tres aristas que salen de un mismo vértice (con vértices: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$). Si una arista es $2\vec{w}$, el volumen se multiplica por 2.
2. Calcula el determinante de 3×3 con las tres aristas como renglones.
3. Paralelepípedo: el valor absoluto. Tetraedro: un sexto del valor absoluto.
4. Volumen con parámetro: |determinante| $= V$ da *dos* ecuaciones, det $= V$ y det $= -V$. Coplanaridad: det $= 0$.

3.3.7 Coordenadas de puntos en una figura

1. Copia la figura y marca qué es cada vector: de qué punto a qué punto va y cuáles lados son iguales como vectores (lados opuestos de un paralelogramo con el *mismo* sentido).
2. Parte de un punto conocido y avanza sumando vectores: $B = A + \overrightarrow{AB}$, $A = D - \overrightarrow{AD}$.
3. Con longitud y dirección: $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con el signo que diga la figura.
4. Para el pie de una perpendicular usa la componente vectorial (sección 3.1.9); para un punto medio, $\frac{1}{2}(A+B)$.
5. Comprueba una condición que no usaste (un lado opuesto, un ángulo recto, un módulo).

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«valores de m (o B, h) para que formen 30°», «sean perpendiculares»	parámetro	4.3.5
«intersección de la recta con el plano», «de las rectas»	punto común	4.3.6
«punto más cercano», «más próximo», «simétrico», «perpendicular común»	pie de perpendicular	4.3.7
«punto de la recta que diste k unidades», «plano a distancia 7»	ecuación con valor absoluto	4.3.8

4.3 Procedimientos

4.3.1 Ecuaciones de una recta

1. **Por dos puntos** A, B: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $P_0 = A$.
2. **De simétricas a vectorial:** lleva cada fracción a la forma $\frac{x-x_0}{a}$ (coeficiente 1 en la variable); lee $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{u} = (a, b, c)$. Una ecuación aparte como $z = 4$ da componente 0.
3. **De forma general a vectorial:** $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Para el punto, da un valor a una variable (por ejemplo $z = 0$) y resuelve el sistema de 2×2 que queda. Comprueba el punto en *las dos* ecuaciones.
4. **Recta perpendicular a un plano** por un punto: $\vec{u} = \vec{n}$.
5. **Recta paralela a dos planos** (o perpendicular a dos rectas): $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (o $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$).

4.3.2 Ecuación de un plano

1. **Consigue un punto y dos vectores del plano**, no paralelos:
   - tres puntos A, B, C: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$;
   - un punto Q y una recta $(P_0, \vec{u})$ que no lo contiene: $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_0Q}$;
   - dos rectas que se cortan: $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ (antes comprueba que se cortan, 4.3.3);
   - dos rectas paralelas: $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ ($\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ es $\vec{0}$ y no sirve);
   - «paralelo a las rectas L y M»: $\vec{u}_L$ y $\vec{u}_M$;
   - «perpendicular al plano π_0»: $\vec{n}_0$ es uno de los vectores; «perpendicular al plano XZ»: $\hat{\jmath}$; «contiene al eje Y»: $\hat{\jmath}$ y el origen.
2. **Normal:** $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$; simplifica dividiendo entre un factor común.
3. **Ecuación:** $\vec{n} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$.
4. **Comprueba** con un punto que no usaste para el término independiente.
5. Si piden la vectorial o las paramétricas: $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$.

4.3.3 Posición relativa de dos rectas

1. **Datos:** $P_1, \vec{u}_1, P_2, \vec{u}_2$ (4.3.1).
2. **¿Paralelas?** Calcula $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Si es $\vec{0}$, se cumple; ve al paso 5.

3.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3.5.1 · Tres vectores con módulo dado

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 3.

Obtenga los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, de módulo 5, 7 y 3 respectivamente, tales que $\vec{a}$ es paralelo al vector $\vec{v} = (6, -2, 3)$; $\vec{b}$ tiene cosenos directores $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \cos\gamma$; y $\vec{c}$ es perpendicular tanto a $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{k}$ como a $\vec{w} = (-3, 1, 4)$.

Resolución.

1. $\vec{a}$**:** $|\vec{v}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$, así que $\vec{a} = \pm\frac{5}{7}(6, -2, 3) = \pm\left(\frac{30}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$.
2. $\vec{b}$**:** $\frac{1}{9} + 2\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$. Entonces $\vec{b} = 7\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}, \pm\frac{14}{3}, \pm\frac{14}{3}\right)$, con los dos signos iguales.
3. $\vec{c}$**:** perpendicular a los dos, paralelo a su producto cruz (aquí $\vec{v} = (3, 0, -4)$):

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0 + 4)\hat{\imath} - (12 - 12)\hat{\jmath} + (3 - 0)\hat{k} = (4, 0, 3), \qquad |\vec{v} \times \vec{w}| = 5.$$

Con módulo 3: $\vec{c} = \pm\frac{3}{5}(4, 0, 3) = \pm\left(\frac{12}{5}, 0, \frac{9}{5}\right)$.

Resultado: $\vec{a} = \pm\left(\frac{30}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$; $\vec{b} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ o $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{14}{3}\right)$; $\vec{c} = \pm\left(\frac{12}{5}, 0, \frac{9}{5}\right)$.

Ejercicio 3.5.2 · Ángulos directores, componente vectorial y área por diagonales

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sean el vector $\vec{v}$ de módulo 2, cuyos ángulos directores son α, $\beta = 30°$ y $\gamma = 60°$, y el vector $\vec{u} = -3\hat{k}$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre un vector $\vec{w}$ paralelo al eje z; b) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo cuyas diagonales son $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución.

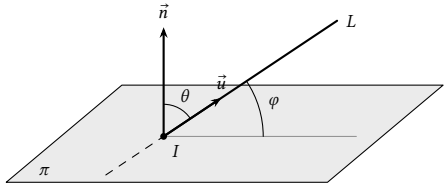
1. $\vec{v}$**:** $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 30° - \cos^2 60° = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$, así que $\alpha = 90°$ y

$$\vec{v} = 2\left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \left(0, \sqrt{3}, 1\right).$$

2. **a)** Con $\vec{w} = k\hat{k}$ ($k \neq 0$): $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{w}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{-3k}{k^2}k\hat{k} = -3\hat{k}$. No depende de k: $\vec{u}$ ya es paralelo al eje z.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$: $\cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, así que $\theta = 120°$.
4. **c)**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (0 + 3\sqrt{3})\hat{\imath} - (0 - 0)\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k} = \left(3\sqrt{3}, 0, 0\right),$$

y $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Sin valor absoluto se obtiene el ángulo obtuso $(180^\circ - \theta)$; los exámenes piden el agudo salvo que digan otra cosa. Un ángulo que no es notable se deja como ang cos $\frac{a}{b}$ o ang sen $\frac{a}{b}$.

4.1.5 Distancias

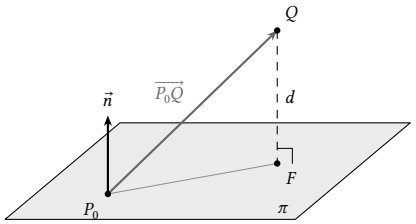
- **Punto Q a plano** $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = |\text{comp}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0Q}|.$$

- **Punto Q a recta** $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u}$: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ (altura del paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_0Q}$ y $\vec{u}$).
- **Rectas que se cruzan** (L_1 por P_1 con $\vec{u}_1$; L_2 por P_2 con $\vec{u}_2$):

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}.$$

  Si se cortan, el numerador es cero y $d = 0$.
- **Rectas paralelas:** distancia de un punto de una a la otra (fórmula punto–recta).
- **Planos paralelos** $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (con el *mismo* vector normal): $d = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Si no son paralelos, se cortan y $d = 0$.
- **Recta paralela a un plano:** distancia de un punto de la recta al plano. Si la recta no es paralela, lo corta y $d = 0$.



2. **Área:** $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

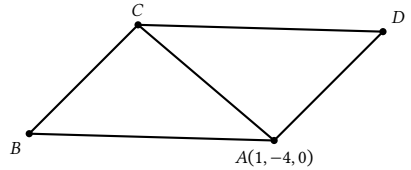
Resultado: $A = 6$ unidades de área.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 5, y 2º final 2016-2, tipo A, problema 5, con $|\vec{b}| = 3$ y componente escalar 2: $|\vec{a}| = 4$ y $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 3.5.6 · Área de una armadura y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 En la armadura de la figura, los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ son paralelos, así como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Sean el punto $A(1, -4, 0)$ y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{BD} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -1)$. Determine: a) el área del paralelogramo $ABCD$; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\hat{k} \times \hat{\jmath}$.



Resolución.

1. **Lados desde B:** los lados que salen de B son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y $\overrightarrow{BD}$ es la diagonal (no dibujada): $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, así que $\overrightarrow{BA} = (3, -2, -1) - (1, 3, -1) = (2, -5, 0)$.
2. **a)**

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5 - 0)\hat{\imath} - (-2 - 0)\hat{\jmath} + (6 + 5)\hat{k} = (5, 2, 11),$$

   $A = \sqrt{25 + 4 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$. (Da lo mismo $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}|$, porque $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.)
3. **b)** $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$. Con $\vec{e} = -\hat{\imath}$, $|\vec{e}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{e}\right)\vec{e} = (-1)(-\hat{\imath}) = \hat{\imath}$.

Resultado: a) $5\sqrt{6}$ unidades de área; b) $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$. El punto A no se necesita.

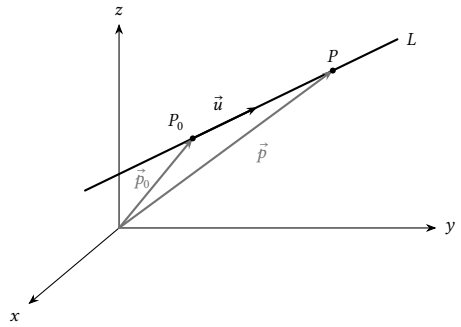
Ejercicio 3.5.7 · Área de un cuadrilátero dado por tres lados

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 3.

Los vectores $\vec{u} = (6, 8, 0)$, $\vec{v} = (8, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, -10, 0)$ son los lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ del cuadrilátero $ABCD$ de la figura. Obtenga el área del cuadrilátero.

4.1.1 La recta

La recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ (*vector director*) es el conjunto de puntos P tales que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{u}$.



- **Ecuación vectorial:** $L:\ \ \vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$.
- **Ecuaciones cartesianas en forma simétrica** (si $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

  Si una componente es cero, esa coordenada es constante y se escribe aparte: con $\vec{u} = (a, b, 0)$, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$; $z = z_0$.
- **Forma general** (intersección de dos planos no paralelos):

$$L:\ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

  El Plan 2016 no la nombra, pero la usa en «la recta intersección de dos planos».

Observación (leer la forma simétrica). Antes de leer el punto y el vector, cada fracción debe quedar como $\frac{x-x_0}{a}$, con coeficiente 1 en la variable. Así,

$$4 - x = \frac{2y - 4}{8} = \frac{z + 5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 5}{3},$$

con punto $(4, 2, -5)$ y vector $(-1, 4, 3)$: en $4 - x$ se cambia el signo del denominador, y en $\frac{2y-4}{8}$ se divide numerador y denominador entre 2.

Dos puntos A y B dan la recta con $P_0 = A$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

4.1.2 El plano

El plano π que pasa por P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ (*vector normal*) es el conjunto de puntos P con $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Ejercicio 3.5.9 · Volumen con un vector dado por cosenos directores

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Tres aristas concurrentes del paralelepípedo P son los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 3)$ y $2\vec{w}$. Dos de los cosenos directores del vector unitario $\vec{w}$ son $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obtenga: a) $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}$; b) el volumen de P.

Resolución.

1. $\vec{w}$**:** $\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$, así que $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
2. **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 + 3 = 5$, $|\vec{v}|^2 = 13$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5}{13}(0, -2, 3) = \left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(0 - \frac{3}{2}\right) + 1\,(0 + 1) = -3\sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

Con la arista $2\vec{w}$ el producto mixto se duplica: $V = 2\left|-3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right| = 6\sqrt{3} + 1$.

Resultado: a) $\left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$; b) $V = 6\sqrt{3} + 1$ unidades cúbicas.

Ejercicio 3.5.10 · Componente escalar y producto mixto con parámetros

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{a} = (-2, 3, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -4)$ y $\vec{c} = (m, n, -6)$. Determine m y n tales que $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{c} = \frac{29}{\sqrt{17}}$ y el producto mixto $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = -67$.

Resolución.

1. **Componente:** $|\vec{b}| = \sqrt{17}$ y $\vec{c} \cdot \vec{b} = n + 24$: $\frac{n+24}{\sqrt{17}} = \frac{29}{\sqrt{17}} \Rightarrow n = 5$.
2. **Producto mixto:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ m & n & -6 \end{vmatrix} = -2(-6 + 4n) - 3(0 + 4m) + 1(0 - m) = 12 - 8n - 13m.$$

3. Con $n = 5$: $12 - 40 - 13m = -67 \Rightarrow -13m = -39 \Rightarrow m = 3$.

Resultado: $m = 3$, $n = 5$; $\vec{c} = (3, 5, -6)$.

Ejercicio 3.5.11 · Tetraedro: componente escalar, área de una cara y volumen

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo C, problema 5.

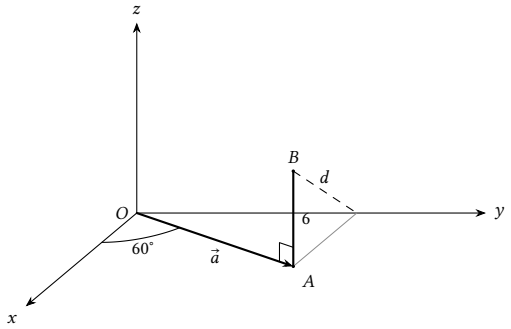
SOLO PLAN 2016 Un tetraedro tiene sus vértices en $A(3, 4, -1)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -4, 1)$ y $D(0, 0, 7)$. Obtenga: a) la componente escalar de $\overrightarrow{CD}$ sobre $\overrightarrow{AC}$; b) el área del triángulo ABC; c) el volumen del tetraedro.

Resolución.

1. **Vectores:** $\overrightarrow{AB} = (-5, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -8, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, -4, 8)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 4, 6)$.
2. **a)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 32 + 12 = -18$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$: $\text{comp}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{CD} = \frac{-18}{6\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Escribe la fórmula antes de sustituir: comp, $\overrightarrow{\text{comp}}$, área o volumen. Así se ve si falta un $\frac{1}{2}$, un $\frac{1}{6}$ o un valor absoluto.
5. Comprueba: el producto cruz es perpendicular a los dos factores, el punto obtenido cumple la condición que no usaste, los parámetros dan el área o volumen pedidos.
6. Deja los resultados exactos (radicales racionalizados o no, pero simplificados) con sus unidades.

Un producto cruz bien hecho resuelve la mitad de los problemas de esta unidad: área, vector perpendicular, paralelismo y volumen salen de él.



Resolución.

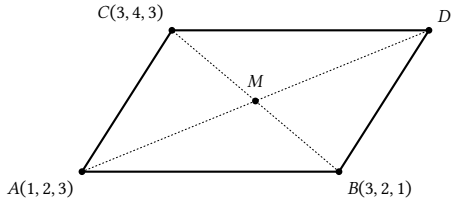
1. A**:** $\vec{a} = 16(\cos 60^\circ, \operatorname{sen} 60^\circ, 0) = \left(8, 8\sqrt{3}, 0\right)$.
2. B**:** $\overrightarrow{AB} = 6\hat{k}$ (hacia arriba), así que $B\left(8, 8\sqrt{3}, 6\right)$.
3. **Distancia al eje** y**:** $d = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$. (Con vectores: $d = \frac{|\overrightarrow{OB} \times \hat{\jmath}|}{|\hat{\jmath}|} = |(-6, 0, 8)| = 10$.)

Resultado: $d = 10$ unidades.

Ejercicio 3.5.14 · Paralelogramo: punto de cruce de las diagonales y ángulo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2024-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(3, 4, 3)$ y D son los vértices del paralelogramo de la figura, cuyas diagonales se cortan en M. Determine: a) las coordenadas de M; b) el coseno del ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** los vértices en orden son A, B, D, C; las diagonales son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
2. **a)** Las diagonales se cortan en su punto medio: $M = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(6, 6, 4) = (3, 3, 2)$. (Con $D = B + C - A = (5, 4, 1)$, también $\frac{1}{2}(A + D) = (3, 3, 2)$.)
3. **b)** $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$: $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$ $(\theta = 60^\circ)$.

Resultado: a) $M(3, 3, 2)$; b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Ejercicio propuesto 3.6.11

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el triángulo T de vértices $A(-1,0,2)$, $B(2,1,-1)$ y $C(1,-2,2)$. Determine: a) el coseno del ángulo A; b) la componente escalar de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$; c) el área de T.

Resultado: a) $\frac{2}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}$; b) $-\frac{15}{\sqrt{19}} = -\frac{15\sqrt{19}}{19}$; c) $\sqrt{34}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.12

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Los vértices de un tetraedro son $A(4,1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,3,4)$ y $D(6,d_2,1)$. Obtenga el valor de d_2 para que el volumen del tetraedro sea de 5 unidades cúbicas.

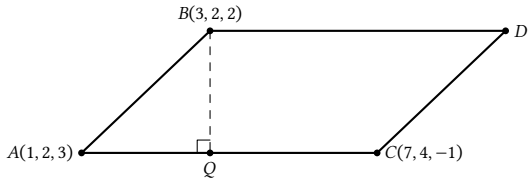
Resultado: $d_2 = 5$ o $d_2 = -5$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.13

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2018-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el paralelogramo de la figura, con $A(1,2,3)$, $B(3,2,2)$ y $C(7,4,-1)$; Q es el pie de la perpendicular desde B al lado $\overline{AC}$. Obtenga: a) las coordenadas de Q; b) el área del triángulo ABC.



Resultado: a) $Q\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, \frac{13}{7}\right)$; b) $\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

Ejercicio propuesto 3.6.14

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2026-2, tipo A, problema 5.

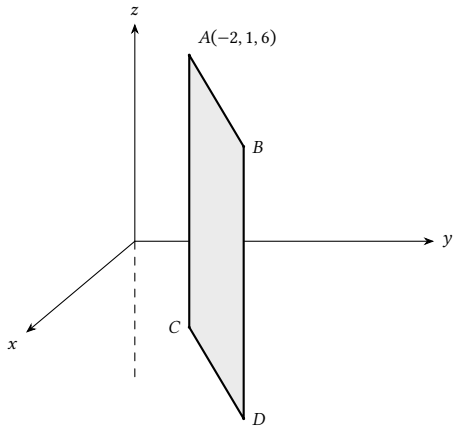
SOLO PLAN 2016 Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coinciden con los lados no paralelos de un paralelogramo de 6 unidades de área; además $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo agudo. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.

3.7 Errores frecuentes

1. **Restar al revés.** $\overrightarrow{AB} = B - A$ (final menos inicial). Un signo mal en $\overrightarrow{AB}$ cambia componentes, ángulos y coordenadas de puntos.



Resolución.

1. B**:** $|\vec{v}| = 5$, así que $\overrightarrow{AB} = 10 \cdot \frac{(4,3,0)}{5} = (8,6,0)$ (en la figura B está a la derecha de A): $B = (6,7,6)$.
2. C**:** C está 10 unidades abajo de A: $\overrightarrow{AC} = (0,0,-10)$, $C = (-2,1,-4)$.
3. D**:** $D = B + \overrightarrow{AC} = (6,7,-4)$. Comprobación: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ y los dos miden 10.
4. **b)** $\overrightarrow{BC} = (-8,-6,-10)$, $\overrightarrow{CD} = (8,6,0)$: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -64 - 36 = -100$, $|\overrightarrow{CD}|^2 = 100$, así que $\overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CD} = (-8,-6,0)$.

Resultado: a) $B(6,7,6)$, $C(-2,1,-4)$, $D(6,7,-4)$; b) $(-8,-6,0)$.

3.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3**.

Ejercicio propuesto 3.6.1

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 2.

Sea el triángulo T cuyos vértices son el origen $O(0,0,0)$ y los puntos A y B, que están sobre los ejes x y y respectivamente. Determine unas coordenadas de A y de B tales que el área de T sea igual a 4 y la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

Resultado: $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$, o bien $A(-4,0,0)$ y $B(0,-2,0)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.2

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 2.

Sean los puntos $P(1,2,-3)$, $Q(0,1,2)$, $R(-1,3,-2)$ y S. a) Compruebe que P, Q y R son tres de los cuatro vértices de un rectángulo cuyo ángulo recto tiene vértice en R. b) Determine las coordenadas del cuarto vértice S.

3.3.8 Problemas con parámetros

1. Escribe los vectores con el parámetro.
2. Traduce cada condición a una ecuación: perpendicular, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; paralelo, componentes proporcionales ($\vec{b}=k\vec{a}$); área, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=A^2$; volumen, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\pm V$; componente, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=c$.
3. Resuelve primero la ecuación lineal y sustituye en la cuadrática.
4. Da el *conjunto* de valores (casi siempre dos) y comprueba uno.

3.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paralelogramo dado por sus diagonales

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Sea el paralelogramo P cuyas diagonales son los vectores $\vec{u}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$ y $\vec{v}=(4,0,2)$. Obtenga: a) el coseno de uno de los ángulos interiores de P; b) el área de P.

Resolución.

1. **Lados a partir de las diagonales:** si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los lados que salen de un vértice, $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$. Sumando y restando:

$$\vec{a}=\tfrac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\tfrac{1}{2}(6,2,-2)=(3,1,-1),$$
$$\vec{b}=\tfrac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})=\tfrac{1}{2}(-2,2,-6)=(-1,1,-3).$$

2. **a) Ángulo interior:** entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que salen del mismo vértice.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3+1+3=1,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11},$$
$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{11}}=\frac{1}{11}.$$

   El otro ángulo interior es el suplementario, con coseno $-\frac{1}{11}$.

3. **b) Área con las diagonales:**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\2&2&-4\\4&0&2\end{vmatrix}=(4-0)\hat{\imath}-(4+16)\hat{\jmath}+(0-8)\hat{k}=(4,-20,-8),$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{16+400+64}=\sqrt{480}=4\sqrt{30},\qquad A=\tfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=2\sqrt{30}.$$

4. **Comprobación con los lados:** $\vec{a}\times\vec{b}=(-2,10,4)$ y $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$.

Resultado: a) $\cos\theta=\frac{1}{11}$ (el ángulo vecino tiene coseno $-\frac{1}{11}$); b) $A=2\sqrt{30}$ unidades de área.

3. **¿Se cortan?** Calcula $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)$. Si vale 0, se cortan: iguala las paramétricas (con parámetros *distintos*, t y λ), resuelve con dos ecuaciones y comprueba la tercera.
4. **¿Se cruzan?** Si el producto mixto no es cero: $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$.
5. **Paralelas:** si P_2 está en L_1, coinciden; si no, el plano que las contiene tiene $\vec{n}=\vec{u}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}$, y su distancia es la de P_2 a L_1.

En el examen escribe cada caso con «se cumple» o «no se cumple»: así se ve que se revisaron los tres.

4.3.4 Distancias

1. **Punto–plano:** sustituye el punto en $Ax+By+Cz+D$, toma valor absoluto y divide entre $|\vec{n}|$.
2. **Punto–recta:** $\overrightarrow{P_0Q}\times\vec{u}$, su módulo, entre $|\vec{u}|$.
3. **Recta–recta:** primero la posición relativa (4.3.3); si se cruzan, la fórmula del producto mixto; si son paralelas, punto–recta.
4. **Plano–plano:** comprueba que sean paralelos (normales proporcionales); escribe los dos con el *mismo* $\vec{n}$ y usa $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$, o la distancia de un punto de uno al otro. Si no son paralelos, $d=0$.
5. Racionaliza: $\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

4.3.5 Ángulos y problemas con parámetro

1. Identifica qué se compara: rectas ($\vec{u}_1,\vec{u}_2$), planos ($\vec{n}_1,\vec{n}_2$) o recta y plano ($\vec{u},\vec{n}$).
2. Usa coseno en los dos primeros casos y **seno** en recta–plano.
3. **Con parámetro:** deja el parámetro en los vectores, escribe la fórmula con el valor conocido ($\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$) y eleva al cuadrado para quitar el valor absoluto y la raíz. Resuelve la ecuación de segundo grado: casi siempre hay **dos** valores («el conjunto de valores»).
4. Para 90° no hace falta la fórmula: basta la condición de perpendicularidad de la tabla de 4.1.3, que es lineal en el parámetro.

4.3.6 Intersecciones

1. **Recta–plano:** sustituye las paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano, despeja t y sustitúyelo en la recta. Si la ecuación queda $0=0$, la recta está contenida en el plano; si queda $0=k\neq 0$, es paralela.
2. **Recta–recta:** iguala las paramétricas con parámetros distintos; dos ecuaciones dan los parámetros, la tercera comprueba.
3. **Plano–plano:** la recta de 4.3.1, paso 3.
4. **Recta y un plano coordenado** (por ejemplo $z=-4$): iguala la coordenada y despeja t.

Resultado: a) $(0,0,-3)$; b) $120°$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

Ejercicio 3.5.3 · Vector perpendicular con módulo dado y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{k} - 2\hat{\imath}$, $\vec{c} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{d} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$. Determine: a) las componentes del vector $\vec{u}$ perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$ y tal que $|\vec{u}| = |\vec{a}|$; b) los cosenos directores de $\vec{a}$; c) el vector $\vec{v}$ tal que $2\vec{a} - 3\vec{v}$ es la componente vectorial de $\vec{d}$ sobre $\vec{c}$.

Resolución.

1. **a)** Con $\vec{b} = (-2,0,4)$, $\vec{c} = (1,-1,2)$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (-4-4)\hat{\jmath} + (2-0)\hat{k} = (4,8,2) = 2(2,4,1).$$

   $|(2,4,1)| = \sqrt{21}$ y $|\vec{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, así que $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}(2,4,1) = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2,4,1)$.
2. **b)** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma = 0$.
3. **c)** $\vec{d}\cdot\vec{c} = 2 - 1 - 2 = -1$, $|\vec{c}|^2 = 6$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{c}}\,\vec{d} = -\frac{1}{6}(1,-1,2)$.
4. Despeje: $2\vec{a} - 3\vec{v} = -\frac{1}{6}\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{18}\vec{c} = \left(2, -\frac{4}{3}, 0\right) + \left(\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Resultado: a) $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2,4,1)$; b) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$; c) $\vec{v} = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Ejercicio 3.5.4 · Vector unitario paralelo a un plano coordenado y a 45° de otro

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Obtenga un vector unitario $\hat{v}$, paralelo al plano XZ, que forma un ángulo de $45°$ con el vector $\vec{u} = (2,0,2)$.

Resolución.

1. **Incógnitas:** paralelo al plano XZ significa componente y nula: $\hat{v} = (x,0,z)$, con $x^2 + z^2 = 1$.
2. **Ángulo:** $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\hat{v}||\vec{u}|\cos 45° \Rightarrow 2x + 2z = 1 \cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, es decir, $x + z = 1$.
3. **Sistema:** $(x+z)^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ dan $2xz = 0$: $x = 0,\ z = 1$ o $x = 1,\ z = 0$.
4. **Comprobación:** $\hat{k}\cdot(2,0,2) = 2 = 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resultado: $\hat{v} = \hat{\imath} = (1,0,0)$ o $\hat{v} = \hat{k} = (0,0,1)$ (basta dar uno).

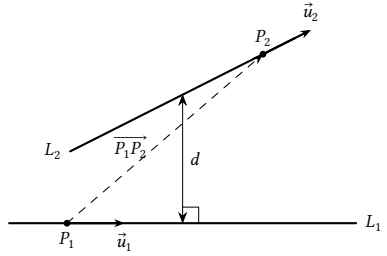
Ejercicio 3.5.5 · Área de un triángulo con ángulo y componente escalar

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 2.

Dos de los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman un ángulo de $60°$. La componente escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es 4 y $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Obtenga el área del triángulo.

Resolución.

1. **Módulo de $\vec{a}$:** $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60° \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = 8$.



4.1.6 Posición relativa e intersecciones

Dos rectas pueden ser:

- **paralelas** (o coincidentes): $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$; son coincidentes si además P_2 está en L_1;
- **se cortan** en un punto: no son paralelas y son coplanares, $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$;
- **se cruzan** (no son paralelas ni se cortan): $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \neq 0$.

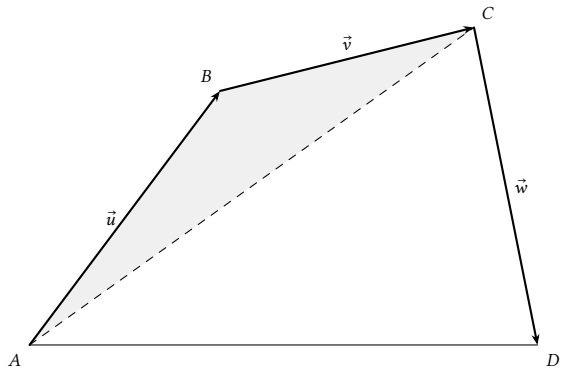
Las paralelas y las que se cortan determinan un plano; las que se cruzan, no.

Recta y plano: si $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$, se cortan en un punto; si $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, la recta es paralela al plano (sin puntos comunes) o está contenida en él. **Dos planos:** si no son paralelos, se cortan en una recta de dirección $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Punto más cercano y simétrico. El punto M de una recta (o de un plano) más cercano a Q es el pie de la perpendicular trazada desde Q: $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{u}$ (o $\overrightarrow{MQ} \parallel \vec{n}$). El *simétrico* de Q respecto a la recta o al plano es Q' con M punto medio de QQ': $\vec{q}\,' = 2\vec{m} - \vec{q}$.

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«ecuación vectorial», «paramétricas», «forma simétrica» de una recta	pasar entre formas	4.3.1
«recta intersección de los planos», dos ecuaciones juntas	forma general a vectorial	4.3.1
«plano que contiene a los puntos», «al punto y a la recta», «a las rectas»	plano por puntos o rectas	4.3.2
«paralelo a las rectas», «perpendicular al plano XZ», «cuyo vector normal es perpendicular a»	plano con condición	4.3.2
«en caso de que sean paralelas… se crucen… se corten»	posición relativa	4.3.3
«distancia del punto al plano», «a la recta», «entre las rectas», «entre los planos»	una distancia	4.3.4
«ángulo entre», «coseno del ángulo»	ángulo	4.3.5



Resolución.

1. **Diagonal y cuarto lado:** $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = (14, 10, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (16, 0, 0)$.
2. **Triángulo** ABC**:** $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 12 - 64) = (0, 0, -52)$; área $\frac{1}{2} \cdot 52 = 26$.
3. **Triángulo** ACD**:** $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 14 & 10 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0 - 160) = (0, 0, -160)$; área 80.
4. **Suma:** $26 + 80 = 106$. (Comprobación: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$ con $\overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w} = (10, -8, 0)$ da $\frac{1}{2} \cdot 212 = 106$.)

Resultado: 106 unidades de área.

Ejercicio 3.5.8 · Paralelepípedo de volumen dado y componente vectorial

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2.

Los vectores $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{w} = 12\hat{\imath} + b\hat{\jmath} - 12\hat{k}$ están sobre tres aristas concurrentes de un paralelepípedo. a) Determine el conjunto de valores de b para los cuales el volumen del paralelepípedo es de 162 unidades cúbicas. b) Obtenga la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

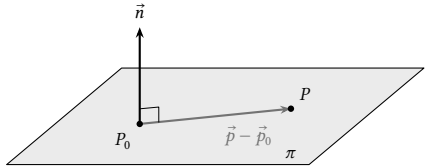
Resolución.

1. **a) Producto mixto:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 12 & b & -12 \end{vmatrix} = 1(-24 + b) - 2(24 + 12) + 2(-2b - 24) = -3b - 144.$$

2. $|-3b - 144| = 162$: $-3b - 144 = 162 \Rightarrow b = -102$, o $-3b - 144 = -162 \Rightarrow b = 6$.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 4 - 2 = 0$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{0}{9}\vec{v} = \vec{0}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Resultado: a) $b \in \{-102,\ 6\}$; b) $\vec{0} = (0, 0, 0)$.



- **Ecuación cartesiana:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, es decir, $Ax+By+Cz+D = 0$ con $D = -\vec{n} \cdot \vec{p}_0$. Los coeficientes de x, y, z son el vector normal.
- **Ecuación vectorial:** $\vec{p} = \vec{p}_0 + r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos y contenidos en el plano; $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- **Ecuaciones paramétricas:** $x = x_0 + ra_1 + sb_1$, $y = y_0 + ra_2 + sb_2$, $z = z_0 + ra_3 + sb_3$.
- **Planos coordenados:** $XY:\ z = 0$, normal $\hat{k}$; $XZ:\ y = 0$, normal $\hat{\jmath}$; $YZ:\ x = 0$, normal $\hat{\imath}$. Un plano «perpendicular al plano XZ» contiene la dirección $\hat{\jmath}$; uno «paralelo al plano YZ» tiene normal $\hat{\imath}$.

De paramétricas a cartesiana: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ y un punto (el que se obtiene con $r = s = 0$). De cartesiana a vectorial: un punto que la satisfaga y dos vectores perpendiculares a $\vec{n}$ y no paralelos entre sí (por ejemplo, para $\vec{n} = (3, -1, 3)$: $(1, 3, 0)$ y $(0, 3, 1)$).

4.1.3 Paralelismo y perpendicularidad

Con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vectores directores de rectas y $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vectores normales de planos:

Objetos	Paralelos	Perpendiculares
Recta y recta	$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{0}$ ($\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2$)	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
Plano y plano	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ($\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$)	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
Recta y plano	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (la recta va «a lo largo» del plano)	$\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$ ($\vec{u}$ es normal al plano)

Observación. En recta–plano las condiciones se *invierten*: paralelismo con producto punto y perpendicularidad con producto cruz, porque se compara la dirección de la recta con la *normal* del plano. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta satisface la ecuación del plano, la recta está *contenida* en el plano.

4.1.4 Ángulos

- **Entre dos rectas:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|}$, con $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$.
- **Entre dos planos:** $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$ (el ángulo entre sus normales).
- **Entre una recta y un plano:** es el ángulo φ entre la recta y su proyección sobre el plano, complemento del ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{n}$. Por eso lleva **seno**:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}.$$

3. **b)**

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-5&-1&0\\-2&-8&2\end{vmatrix}=(-2-0)\hat{\imath}-(-10-0)\hat{\jmath}+(40-2)\hat{k}=(-2,10,38),$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+100+1444}=\sqrt{1548}=6\sqrt{43}$; área $3\sqrt{43}$.

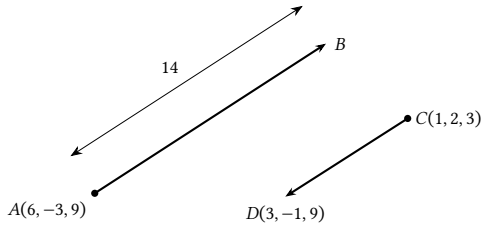
4. **c)** $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=6-40+304=270$; $V=\frac{270}{6}=45$.

Resultado: a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $3\sqrt{43}$ unidades de área; c) 45 unidades cúbicas.

Ejercicio 3.5.12 · Segmento dirigido paralelo a otro

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 2.

El segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, de longitud 14, es paralelo al segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, como se muestra en la figura, con $A(6,-3,9)$, $C(1,2,3)$ y $D(3,-1,9)$. Empleando álgebra vectorial, determine las coordenadas del punto B.



Resolución.

1. **Dirección:** $\overrightarrow{CD}=D-C=(2,-3,6)$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+9+36}=7$.
2. **Sentido:** en la figura las flechas apuntan en sentidos contrarios, así que $\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{DC}=(-2,3,-6)$.
3. **Vector:** $\overrightarrow{AB}=14\cdot\frac{(-2,3,-6)}{7}=(-4,6,-12)$.
4. **Punto:** $B=A+\overrightarrow{AB}=(6-4,\ -3+6,\ 9-12)=(2,3,-3)$.

Resultado: $B(2,3,-3)$. (Si se tomara el mismo sentido que $\overrightarrow{CD}$, saldría $B(10,-9,21)$; la figura descarta esa opción.)

Ejercicio 3.5.13 · Distancia de un punto al eje y

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 2.

En la figura, el punto A está en el plano XY y su vector de posición $\vec{a}$ forma un ángulo de 60° con el eje x; el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al eje z. Si $|\vec{a}|=16$ y $|\overrightarrow{AB}|=6$, determine la distancia entre el punto B y el eje y.

Unidad 4 · La recta y el plano en el espacio

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará el álgebra vectorial para obtener las diferentes ecuaciones de la recta y del plano, así como para determinar las relaciones entre ellos y con puntos en el espacio de tres dimensiones.

Plan 2016 (Cálculo y Geometría Analítica, tema 7). El alumno aplicará el álgebra vectorial para obtener las diferentes ecuaciones de la recta y del plano en el espacio, así como para determinar las relaciones entre estos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** en el Plan 2010, sale en los 9 finales revisados, casi siempre como problema 3 (13 problemas: en cuatro finales vienen dos). Lo que piden: plano que contiene a una o dos rectas con una condición 6, ángulo recta–plano o plano–plano con parámetro 3, distancia entre rectas o punto más cercano 3, recta intersección de dos planos 3, distancia de un punto a un plano o a una recta 3, posición relativa de dos rectas 1 y punto simétrico respecto a una recta 1 (un problema cuenta en varios subtemas). El 2º parcial 2005-2 trae 6 problemas más. En el Plan 2016, el problema 6 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica (el 7 en los de siete problemas): plano que contiene dos rectas o una recta y un punto 15, distancia de un punto a un plano o entre planos 11, recta o plano perpendicular 10, ángulos 8, distancia de un punto a una recta 8, plano por tres puntos 7, intersección recta–plano 6, paralelismo 6, intersección de dos rectas 5, distancia entre rectas 4 y recta intersección de dos planos 2.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Repasa en la Unidad 3 el producto cruz y el producto mixto (15 min).
  2. Lee las secciones 4.1.1 a 4.1.6 (40 min); copia la tabla de la sección 4.1.3 y las fórmulas de 4.1.5.
  3. Aprende los procedimientos 4.3.2 (plano), 4.3.3 (posición relativa) y 4.3.4 (distancias): cubren más de la mitad de los problemas.
  4. Sigue el ejemplo de la sección 4.4 tapando la resolución.
  5. Resuelve con cronómetro, 15 min cada uno, los ejercicios 4.5.1, 4.5.3, 4.5.5, 4.5.7, 4.5.11 y 4.5.12.
  6. Plan 2016: agrega los ejercicios 4.5.2, 4.5.8 y 4.5.13. Plan 2010: agrega 4.5.4 y 4.5.6.

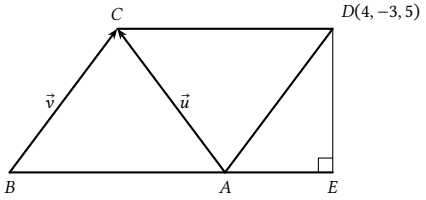
4.1 Conceptos y expresiones

Todo lo de esta unidad se reduce a dos datos por objeto: una recta queda determinada por **un punto y un vector director**; un plano, por **un punto y un vector normal**. Los productos punto, cruz y mixto (Unidad 3) hacen el resto.

Ejercicio 3.5.15 · Vértices de un paralelogramo

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Sea el paralelogramo $ADCB$ de la figura, donde $\vec{u} = (5, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 4, 6)$, y el punto E es el pie de la perpendicular desde D a la recta BA. Determine las coordenadas de los puntos A, C, B y E.



Resolución.

1. **Lectura de la figura:** $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ es un lado y $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ es una diagonal. Los lados opuestos son iguales como vectores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
2. A**:** $A = D - \vec{v} = (4, -3, 5) - (-1, 4, 6) = (5, -7, -1)$.
3. C**:** $C = A + \vec{u} = (10, -6, -1)$. B**:** $B = C - \vec{v} = (11, -10, -7)$.
4. **Comprobación:** $\overrightarrow{CD} = (-6, 3, 6) = \overrightarrow{BA}$.
5. E**:** es A más la componente vectorial de $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ sobre la dirección $\overrightarrow{BA} = (-6, 3, 6)$:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{BA} = 6 + 12 + 36 = 54, \quad |\overrightarrow{BA}|^2 = 81, \quad \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{BA}}\,\vec{v} = \tfrac{54}{81}(-6, 3, 6) = (-4, 2, 4),$$

$E = A + (-4, 2, 4) = (1, -5, 3)$. Comprobación: $\overrightarrow{ED} = (3, 2, 2)$ y $(3, 2, 2) \cdot (-6, 3, 6) = 0$.

Resultado: $A(5, -7, -1)$, $C(10, -6, -1)$, $B(11, -10, -7)$, $E(1, -5, 3)$.

Ejercicio 3.5.16 · Cuadrado en el espacio

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2017-1, tipo A, problema 5.

SOLO PLAN 2016 El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lados de 10 unidades; los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos al eje z y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al vector $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, con $A(-2, 1, 6)$. Determine: a) las coordenadas de B, C y D; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\overrightarrow{CD}$.

2. **Confundir las dos componentes.** La escalar es un número, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; la vectorial es un vector, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$. Y se divide entre el módulo del vector *sobre* el que se proyecta.
3. **Área de paralelogramo por diagonales sin el $\frac{1}{2}$.** Con las diagonales, $A = \frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$; con los lados, $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.
4. **Tomar una diagonal como lado.** En el ejercicio 3.5.6 $\overrightarrow{BD}$ es diagonal y en el 3.5.15 $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ también; se lee la figura antes de multiplicar.
5. **Olvidar el valor absoluto o el $\frac{1}{6}$.** El producto mixto puede salir negativo; el volumen es su valor absoluto, y el del tetraedro es un sexto. Con parámetro, $|\det| = V$ da dos ecuaciones.
6. **Ángulo interior con un vector al revés.** El ángulo en A usa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; con $\overrightarrow{BA}$ sale el suplemento (coseno con el signo cambiado).
7. **Cuarto vértice con la fórmula equivocada.** $D = A + C - B$ vale si B es el vértice opuesto a D. Se identifica primero cuál es el vértice opuesto (en el propuesto 3.6.2, R).
8. **Perder una solución.** «Paralelo a $\vec{v}$ con módulo 5», «unitario perpendicular» y los parámetros cuadráticos tienen dos respuestas; se dan las dos o se dice que hay dos.
9. **Errores en el determinante.** El término de $\hat{\jmath}$ lleva signo menos: $-(a_1b_3 - a_3b_1)$. Se comprueba que $\vec{a} \times \vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

3.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\overrightarrow{AB} = B - A \cdot |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot$ punto medio $\frac{1}{2}(A + B)$.
- Cosenos directores: $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \hat{v}$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdot \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta \cdot \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Áreas: paralelogramo $|\vec{a} \times \vec{b}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$; por diagonales $\frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$.
- Volúmenes: paralelepípedo $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$; tetraedro $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$; coplanares si el producto mixto es 0.
- Paralelogramo $ABCD$: $D = A + C - B$; pie de la perpendicular de B a AC: $A + \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$; simétrico de P respecto a M: $2M - P$.

3.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe en componentes todos los vectores y segmentos del enunciado ($\overrightarrow{AB} = B - A$) antes de calcular nada.
2. Si hay figura, cópiala y marca qué vectores son lados, cuáles diagonales y el sentido de cada flecha.
3. Calcula una sola vez los productos que se repiten ($\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, módulos) y úsalos en todos los incisos.

Resultado: a) $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$; b) $S(2, 0, 1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 2.

Sean $\vec{a} = (6, -4, 4)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$ y $\vec{c} = (2, 2, c_3)$. a) Determine c_3 tal que $\vec{a}$ sea perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$. b) Obtenga el área A del paralelogramo que tiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados no paralelos.

Resultado: a) $c_3 = -1$; b) $A = 6\sqrt{17}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 2.

Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 10\hat{k}$ y $\vec{d} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$, donde $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{d}$ y $-2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -36$. Determine las componentes de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

Resultado: $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (-6, -12, 12)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 137.

Ejercicio propuesto 3.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 3.

Sean los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(4, 2, -1)$, $C(c_1, 0, 2)$ y $D(4, 2, d_3)$. Determine c_1 y d_3 para que los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean paralelos.

Resultado: $c_1 = 2$, $d_3 = 3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 4.

Sean $\vec{v} = -\hat{\imath} + a\hat{k}$ y $\vec{u} = \hat{\imath} + b\hat{\jmath} + \hat{k}$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, obtenga el conjunto de valores de a y el de b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean dos lados de un paralelogramo de área 6.

Resultado: $a = 1$; $b \in \{-4,\ 4\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.7

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 5.

Sean los puntos $A\left(4\sqrt{2}, 0, -4\right)$ y $B\left(0, 4\sqrt{2}, -4\right)$, y sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Determine: a) la componente vectorial del vector de posición de B sobre el vector $\hat{\jmath}$; b) la componente escalar del vector de posición de A sobre el vector de posición de C.

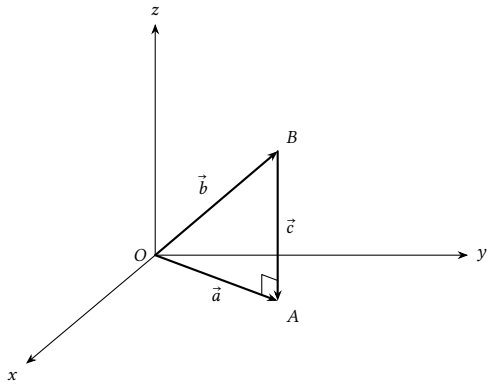
Resultado: a) $\left(0, 4\sqrt{2}, 0\right)$; b) $4\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.8

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 6.

En la figura, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ está en el plano XY, $\vec{c}$ va de B a A y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, con $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$; b) el coseno del ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{a}$; c) el área del triángulo ABO.



Resultado: a) $\vec{a}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.9

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-1, tipo C, problema 5.

SOLO PLAN 2016 Un paralelepípedo P tiene aristas concurrentes en el vértice $A(3, -4, -2)$ que terminan en los puntos $B(-3, -3, 0)$, $C(2, -8, 0)$ y $D(-1, -7, 0)$. Determine: a) el volumen de P; b) el coseno del ángulo que forman las aristas $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

Resultado: a) 20 unidades cúbicas; b) $\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{609}} = \frac{20\sqrt{609}}{609}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 138.

Ejercicio propuesto 3.6.10

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2017-2, tipo A, problema 6.

SOLO PLAN 2016 Sean $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}$ el vector representado por el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, con $A(-3, 0, 1)$ y $B(-5, 1, 5)$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$; b) un vector unitario $\vec{w}$ perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo P que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados concurrentes.

Resultado: a) $\frac{4}{7}(-2, 1, 4)$; b) $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ (o su opuesto); c) $5\sqrt{6}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 139.